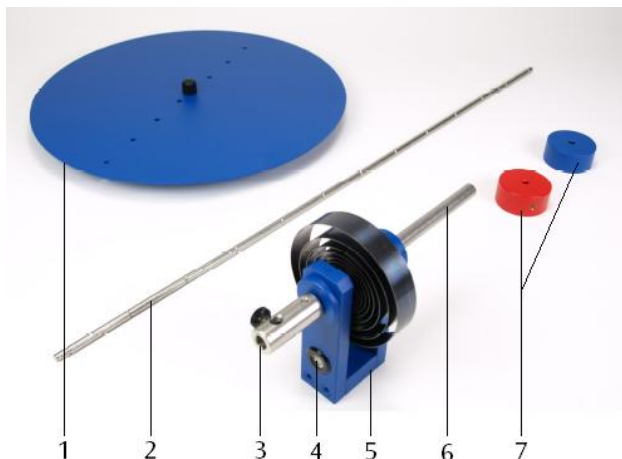


## Drillachse U20050

### Bedienungsanleitung

03/11 Alf



- 1 Kreisscheibe
- 2 Querstab
- 3 Aufnahme für Probekörper
- 4 Libelle
- 5 Gabel mit Schneckenfeder
- 6 Haltestab
- 7 Massen

#### 1. Sicherheitshinweise

Bei Überdrehen der Feder besteht die Gefahr, dass die Probekörper wegen der hohen Fliehkraft weggeschleudert werden.

- Probekörper nicht mehr als 360° maximal auslenken (180° ist empfehlenswert).

#### 2. Beschreibung

Die Drillachse mit den zugehörigen Zubehörteilen dient zur Untersuchung von Drehschwingungen und zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verschiedener Probekörper aus der Schwingungsdauer.

Die Drillachse besteht aus einer zweifach kugelgelagerten Welle, die durch eine Schneckenfeder an eine Gabel angekoppelt ist. Ein Haltestab ermöglicht Aufbau in einem Stativfuß oder einer Tischklemme. Eine an der Gabel angebrachte Libelle dient zur waagrechten Ausrichtung der Drillachse. Als Probekörper dienen ein Querstab mit verschiebbaren Massestücken und eine Kreisscheibe mit einer zentralen und acht exzentrischen Bohrungen für Experimente zur Bestimmung von Trägheitsmomenten bei exzentrischen Drehachsen und zur Bestätigung des Steiner'schen Satzes.

#### 3. Lieferumfang

1 Welle mit Gabel, Schneckenfeder, Haltestab und Aufnahme für Probekörper

1 Querstab

2 Massen

1 Kreisscheibe

#### 4. Technische Daten

Richtmoment der Feder:	0,028 Nm/rad
Höhe der Drillachse:	ca. 200 mm
Querstab:	
Stablänge:	620 mm
Masse:	ca. 135 g
Massestücke:	je 260 g
Kreisscheibe:	
Durchmesser:	320 mm
Masse:	495 g
Bohrungen:	9
Abstand der Bohrungen:	20 mm

## 5. Zubehör

Satz Probekörper zur Drillachse

U20051

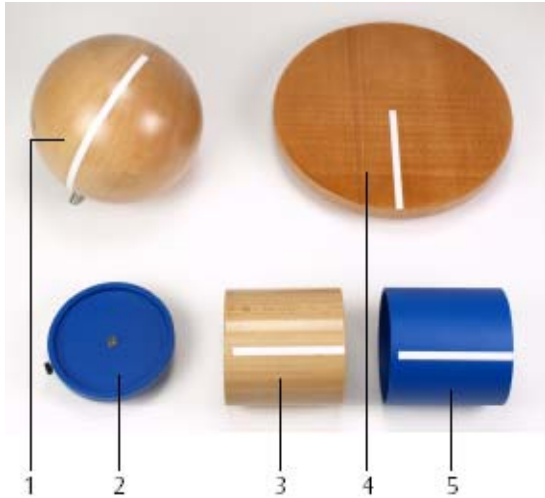


Fig. 1 Satz Probekörper zur Drillachse  
1 Holzkugel, 2 Aufnahmeteller, 3 Vollzylinder, 4 Holzscheibe, 5 Hohlzylinder

Das Zubehör zur Drillachse (U20050) besteht aus zwei Zylindern mit nahezu identischer Masse, jedoch unterschiedlicher Masseverteilung, einem Aufnahmeteller für die Zylinder, einer Holzscheibe sowie einer Holzkugel.

Hohlzylinder (Metall):

Außendurchmesser:	90 mm
Höhe:	90 mm
Masse:	ca. 425 g

Vollzylinder (Holz):

Durchmesser:	90 mm
Höhe:	90 mm
Masse:	ca. 425 g

Aufnahmeteller:

Durchmesser:	100 mm
Masse:	ca. 122 g

Holzscheibe:

Durchmesser:	220 mm
Höhe:	15 mm
Masse:	ca. 425 g
Trägheitsmoment:	0,51 kgm <sup>2</sup>

Holzkugel:

Durchmesser:	146 mm
Masse:	ca. 1190 g
Trägheitsmoment:	0,51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Funktionsprinzip

Zur Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Probekörper werden diese auf eine kugelgelagerte Achse gesetzt, an der eine Schneckenfeder mit dem Richtmoment  $D$  angreift. Aus der Schwingungsdauer  $T$  des Drehpendels ergibt sich das Trägheitsmoment  $J$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Die experimentell ermittelten Werte bestätigen die Ergebnisse, die die Theorie für einen Körper der Masse  $m$  liefert, dessen Masselemente  $\Delta m$  im Abstand  $r_z$  um eine feste Achse rotieren:

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Hinweise zur Bedienung

- Drillachse im Stativfuß aufbauen und mit Hilfe der Libelle horizontal ausrichten.
- Schrauben an den Massestücken, die die Kugelrasten gegen den Stab drücken nicht betätigen. (Schrauben sind so justiert, dass sich die Massestücke verschieben lassen und dass sie gegen die Zentrifugalkraft gehalten werden.)
- Versuchsanordnung immer so auslenken, dass die Feder zusammengedrückt und nicht aufgebogen wird.
- Zu Beginn des Schwingungsvorgangs ist eine Auslenkung von 180° (max. 360°) empfehlenswert.
- Die Schwingungsdauer aus mehreren Messungen für z.B. 5 Schwingungen durch Mittelwertbildung bestimmen.
- Den genauen Wert des zur Bestimmung des Trägheitsmoments  $J$  aus der Schwingungsdauer  $T$  erforderlichen Richtmoments  $D$  auf der Drillachse oder in der Bedienungsanleitung vermerken.

## 8. Experimentierbeispiele

Zur Durchführung der Experimente sind folgende Geräte zusätzlich erforderlich bzw. empfehlenswert:

1 Satz Probekörper zur Drillachse	U20051
1 Stativfuß, 3-Bein, 185 mm	U13271
1 Digitale Stoppuhr	U11902
1 Präzisionskraftmesser 1 N	U20032

### 8.1 Bestimmung des Richtmoments $D$

- Stab ohne Massen auf die Drillachse stecken.
- 1 N Kraftmesser so am Stab anbringen, dass er senkrecht daran angreift.
- In Abständen  $r$  von 10 cm, 15 cm und 20 cm von der Stabmitte die Kräfte  $F$  messen, die erforderlich sind, um den Stab um  $\alpha = 180^\circ$  aus der Gleichgewichtslage zu drehen.

Drehmoment:  $M = F \cdot r$

Richtmoment:  $D = \frac{M}{\alpha}$

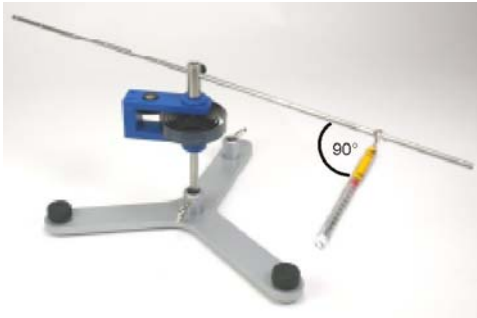


Fig. 2 Bestimmung des Richtmoments

### 8.2 Abhängigkeit des Trägheitsmomentes $J$ vom Abstand $r$ , in dem eine Masse $m$ um eine feste Achse rotiert

- Stab ohne Massen auf die Drillachse stecken.
- Trägheitsmoment  $J(\text{Stab})$  ermitteln.
- Massen symmetrisch in Abständen von  $r = 5$  cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm und 25 cm von der Stabmitte anordnen.
- Trägheitsmoment  $J(\text{Stab} + \text{Massen})$  bestimmen.
- $J(\text{Massen}) = J(\text{Stab} + \text{Massen}) - J(\text{Stab})$  errechnen.

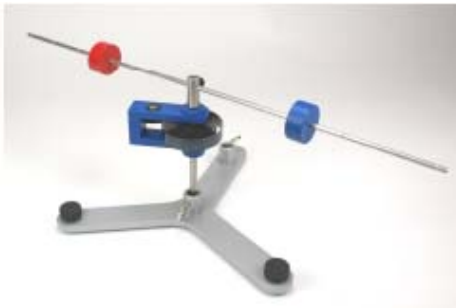


Fig. 3 Abhängigkeit des Trägheitsmomentes  $J$  vom Abstand  $r$

### 8.3 Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern gleicher Masse jedoch unterschiedlicher Massenverteilung

#### 8.3.1 Holzscheibe (HS)

- Holzscheibe (HS) auf die Drillachse stecken.
- Trägheitsmoment  $J(\text{HS})$  ermitteln.



Fig. 4 Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Holz-scheibe

#### 8.3.2 Vollzylinder (VZ) und Hohlzylinder (HZ)

- Aufnahmehalter (T) auf die Drillachse stecken.
- Trägheitsmoment  $J(\text{T})$  bestimmen.
- Zylinder auf den Aufnahmehalter (T) setzen.
- Trägheitsmomente  $J(\text{VZ} + \text{T})$  und  $J(\text{HZ} + \text{T})$  ermitteln.
- Durch Differenzbildung Trägheitsmomente für Voll- und Hohlzylinder errechnen.

$$J(\text{VZ}) = J(\text{VZ} + \text{T}) - J(\text{T})$$

$$J(\text{HZ}) = J(\text{HZ} + \text{T}) - J(\text{T})$$



Fig. 5 Vergleich der Trägheitsmomente von Zylindern

#### 8.4 Trägheitsmoment einer Kugel (K)

- Kugel (K) auf die Drillachse stecken.
- Trägheitsmoment  $J(\text{K})$  ermitteln.

Ein Vergleich der Kugel mit der Holz-scheibe (siehe 8.3.1.) ergibt, dass sie gleiche Trägheitsmomente besitzen.

Kugeln (K) und Holz-scheiben (HS) haben gleiche Trägheitsmomente, wenn für ihre Massen  $m$  und Radien  $R$  gilt:

$$m(\text{HS}) \cdot R(\text{HS})^2 = \frac{4}{5} m(\text{K}) \cdot R(\text{K})^2$$



Fig. 6 Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Kugel

#### 8.5 Abhängigkeit des Trägheitsmomentes $J$ vom Abstand $a$ zwischen Rotations- und Schwer-punktachse, Bestätigung des Steiner'schen Satzes

- Kreisscheibe auf die Drillachse stecken und horizontal justieren.
- Kreisscheibe um ihre Schwer-punktachse ( $a = 0$ ) rotieren lassen.
- Trägheitsmoment  $J_0$  ermitteln.
- Trägheitsmomente  $J_a$  für die Abstände  $a = 2$  cm, 4 cm, 6 cm.....16 cm zwischen Rotations- und Schwer-punktachse bestimmen.

- Nach jeder Änderung von  $a$  Kreisscheibe horizontal justieren.
- Quotienten  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{konstant}$  bilden.

Damit ist der Steiner'sche Satz  $J_a = J_0 + ma^2$  bestätigt.

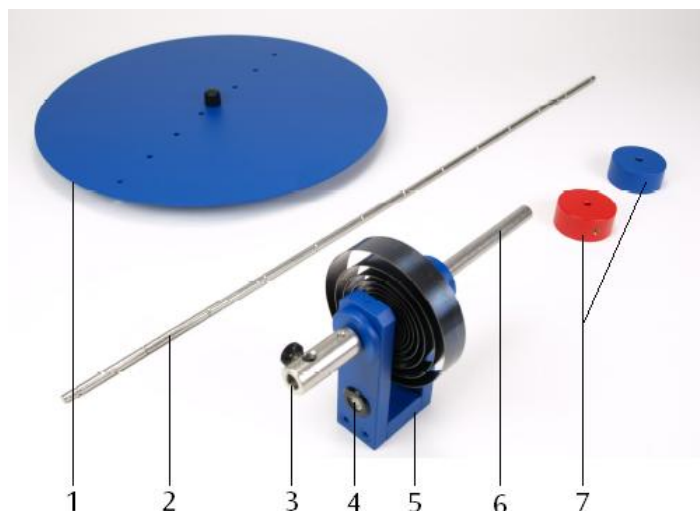


Fig. 7 Bestätigung des Steiner'schen Satzes

## Torsion Axle U20050

### Instruction sheet

03/11 Alf



- 1 Circular disc
- 2 Cross bar
- 3 Mount for test bodies
- 4 Spirit level
- 5 Bracket with coiled spring
- 6 Support rod
- 7 Weights

### 1. Safety instructions

If the coiled spring is too tightly wound, there is the danger that high centrifugal forces cause the test bodies to be hurled away.

- Do not displace the test bodies more than a maximum of  $360^\circ$  ( $180^\circ$  is recommended).

### 2. Description

The torsion axle with its corresponding accessories and parts are used to investigate rotational oscillation and for determining the moments of inertia of various sample objects from the period of oscillation.

The torsion axle consists of a shaft with twin ball races which is coupled to a bracket by a coiled spring. A support rod permits assembly on a stand base or a table clamp. A spirit level is provided so that the torsion axle can be aligned to the horizontal. The test bodies are a cross bar with weights that can be moved along its length and a circular disc with one hole in the centre and eight away from the centre for determining moments of inertia for eccentric axes of rotation and confirming Steiner's theorem.

### 3. Equipment supplied

- 1 shaft with bracket, coiled spring, support rod and mount for test bodies
- 1 cross bar
- 2 weights
- 1 circular disc

### 4. Technical data

Restoring torque of the spring:	0.028 Nm/rad
Height of the torsion axle:	approx. 200 mm
Cross bar:	
Length:	620 mm
Mass:	approx. 135 g
Weights:	260 g each
Circular disc:	
Diameter:	320 mm
Mass:	495 g
Boreholes:	9
Borehole spacing:	20 mm

## 5. Accessories

Set of Test Bodies for Torsion Axle

U20051

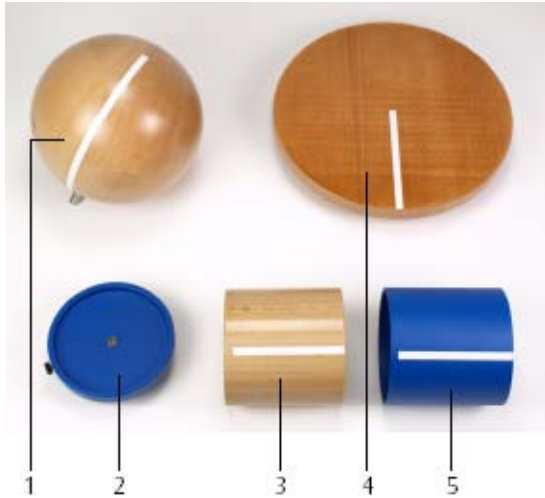


Fig. 1 Set of Test Bodies for Torsion Axle  
1 Wooden sphere, 2 Mounting plate, 3 Solid cylinder, 4 Wooden disc, 5 Hollow cylinder

The accessories for the torsion axle (U20050) consist of two cylinders with nearly identical weights but different weight distributions, a mounting plate for the cylinders, a wooden disc and a wooden sphere.

Hollow cylinder (metal):

External diameter:	90 mm
Height:	90 mm
Mass:	approx. 425 g

Solid cylinder (wood):

Diameter:	90 mm
Height:	90 mm
Mass:	approx. 425 g

Mounting plate:

Diameter:	100 mm
Mass:	approx. 122 g

Wooden disc:

Diameter:	220 mm
Height:	15 mm
Mass:	approx. 425 g
Moment of inertia:	0.51 kgm <sup>2</sup>

Wooden sphere:

Diameter:	146 mm
Mass:	approx. 1190 g
Moment of inertia:	0.51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Theory

To determine various moments of inertia for different test bodies, these objects are placed on a ball-bearing supported shaft which has a coiled spring attached. The coiled spring is subjected to restoring torque  $D$ . The oscillation period  $T$  of the torsion pendulum results in the moment of inertia  $J$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2$$

The values determined experimentally confirm the findings theoretically postulated for a body of the mass  $m$ , whose mass elements  $\Delta m$  rotate at a distance  $r_z$  around a fixed axis:

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Operating notes

- Mount the torsion axle in a tripod stand and align it horizontally using the spirit level.
- Do not adjust the screws that press the securing spheres to the rod. (They are adjusted so that the weights can be moved along the rod but are not forced outwards by centrifugal forces.)
- Always arrange the experiment so that the spring is compressed and not extended.
- Start the oscillation by turning the rod 180° (max. 360°).
- Determine the oscillation period from several measurements by forming the mean value out of e.g. 5 oscillations.
- Note down the exact value of the restoring torque  $D$  on the torsion axle or in the operating manual. This value is used to determine the moment of inertia  $J$  from the oscillation period  $T$ .

## 8. Experiments

To perform the experiments the following apparatus are required (recommended):

1 Stand Base Tripod, 185 mm	U13271
1 Digital Stopwatch	U11902
1 Precision Dynamometer 1 N	U20032
1 Set of Test Bodies for Torsion Axle	U20051

### 8.1 Determination of the restoring torque $D$

- Insert the rod without weights onto the torsion axle.
- Attach the 1 N dynamometer to the rod so that it acts perpendicularly to it.
- At distances of  $r = 10$  cm, 15 cm and 20 cm from the centre of the rod measure the force  $F$  needed to rotate the rod from its state of equilibrium by about  $\alpha = 180^\circ$ .

Torque:  $M = F \cdot r$

Restoring torque:  $D = \frac{M}{\alpha}$



Fig. 2 Determination of the restoring torque

### 8.2 Dependency of the moment of inertia $J$ on the distance $r$ , in which a mass $m$ rotates round a fixed axis

- Attach the rod without weights to the torsion axle.
- Determine the moment of inertia  $J(\text{rod})$ .
- Arrange the weights at symmetrical distances of  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$ ,  $15 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  and  $25 \text{ cm}$  from the centre of the rod.
- Determine the moment of inertia  $J(\text{rod} + \text{weights})$ .
- Calculate the moment of inertia  $J(\text{weights}) = J(\text{rod} + \text{weights}) - J(\text{rod})$ .



Fig. 3 Dependency of the moment of inertia  $J$  on the distance  $r$

### 8.3 Comparison of the moments of inertia of cylinders of the same weight but with different weight distribution

#### 8.3.1 Wooden disc (WD)

- Attach the wooden disc (WD) to the torsion axle.
- Determine the moment of inertia  $J(\text{WD})$ .



Fig.4 Determination of the moment of inertia of a wooden disc

#### 8.3.2 Solid cylinder (SC) and hollow cylinder (HC)

- Attach the mounting plate (P) to the torsion axle.
- Determine the moment of inertia  $J(\text{P})$ .
- Place a cylinder onto the mounting plate (P).
- Determine the moments of inertia  $J(\text{SC} + \text{P})$  and  $J(\text{HC} + \text{P})$ .
- Determine the moments of inertia  $J(\text{SC}) = J(\text{SC} + \text{P}) - J(\text{P})$   
 $J(\text{HC}) = J(\text{HC} + \text{P}) - J(\text{P})$  by subtracting.



Fig. 5 Comparison of the moments of inertia of cylinders

### 8.4 Determination of the moment of inertia of a sphere (S)

- Attach the sphere (S) to the torsion axle.
- Determine the moment of inertia  $J(\text{S})$ .

A comparison of the sphere with the wooden disc (refer to 8.3.1.) reveals that they both have the same moment of inertia. Spheres (S) and wooden discs (WD) have the same moment of inertia if the following holds true with regard to their mass  $m$  and their radii  $R$ :

$$m(\text{WD}) \cdot R(\text{WD})^2 = \frac{4}{5} m(\text{S}) \cdot R(\text{S})^2$$



Fig. 6 Determination of the moment of inertia of a sphere

### 8.5 Dependency of the moment of inertia $J$ on the distance $a$ between the rotation axis and the axis of the centre of gravity, verification of Steiner's theorem

- Attach the round disc to the torsion axle and align it horizontally.
- Start the disc turning about its centre of gravity ( $a = 0$ ).
- Determine the moment of inertia  $J_0$ .
- Determine the moments of inertia  $J_a$  for different distances of  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $4 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ..... $16 \text{ cm}$  be-

tween the rotation axis and the axis of the centre of gravity.

- Re-adjust the horizontal alignment of the disc after each change of distance  $a$ .
- Form the ratios  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{constant}$

Thus Steiner's theorem  $J_a = J_0 + ma^2$  is verified.



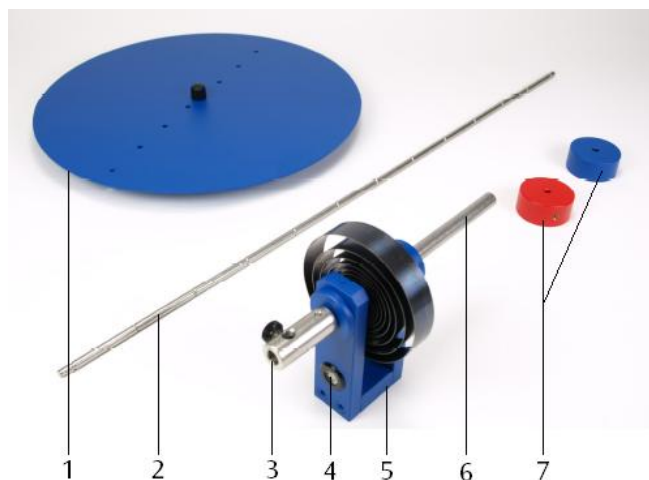
Fig. 7 Verification of Steiner's theorem



## Axe de torsion U20050

### Instructions d'utilisation

03/11 Alf



- 1 Disque
- 2 Barre transversale
- 3 Fixation pour les échantillons
- 4 Nivelles
- 5 Fourche avec ressort conique
- 6 Barre de support
- 7 Masses

#### 1. Consignes de sécurité

Si le ressort est trop tendu, les échantillons risquent d'être propulsés avec violence en raison de l'importante force centrifuge.

- Ne pas tourner les échantillons à plus de 360° (un angle de 180° est recommandé).

#### 2. Description

L'axe de torsion avec ses éléments accessoires permet d'étudier les oscillations tournantes et de déterminer les moments d'inertie de différents éprouvettes à partir de la période d'oscillation.

L'axe de torsion est constitué d'un arbre à double logement sur roulement à billes qui est relié à une fourche par un ressort spiral. Une barre transversale permet de le monter sur un trépied ou une attache de table. Une nivelles posée sur la fourche permet d'orienter l'axe de torsion horizontalement. Une barre transversale avec des masses mobiles et un disque avec un trou centré et huit trous excentrés pour les expériences servent d'éprouvettes témoins dans les expériences destinées à déterminer les moments d'inertie avec un axe de rotation excentré et à confirmer la loi de Steiner.

#### 3. Matériel fourni

- 1 fourche avec ressort spiral, barre de support et fixation pour les éprouvettes
- 1 barre transversale
- 2 masses
- 1 disque

#### 4. Caractéristiques techniques

Moment de rappel des ressorts :	0,028 Nm/roue
Hauteur de l'axe de torsion :	env. 200 mm
Barre transversale :	
Longueur :	620 mm
Masse de la barre :	env. 135 g
Masses :	260 g chacun
Disque :	
Diamètre :	320 mm
Masse :	495 g
Alésages :	9
Ecart des alésages :	20 mm

## 5. Accessoires

Corps géométriques adaptés à l'axe de torsion

U20051

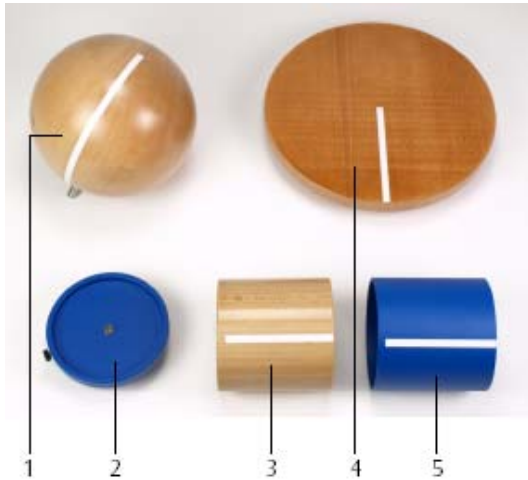


Fig. 1 Corps géométriques adaptés à l'axe de torsion  
1 sphère en bois, 2 plateau de positionnement, 3 cylindre massif, 4 disque en bois, 5 cylindre creux

Les accessoires pour l'axe de torsion (U20050) sont constitués de deux cylindres avec des masses presque identiques, mais une répartition des masses différente, un plateau permet leur positionnement sur l'axe, un disque en bois et une sphère en bois.

Cylindre creux (métallique) :

Diamètre extérieur :	90 mm
Hauteur :	90 mm
Masse :	env. 425 g

Cylindre massif (en bois) :

Diamètre :	90 mm
Hauteur :	90 mm
Masse :	env. 425 g

Plateau de positionnement:

Diamètre :	100 mm
Masse :	env. 122 g

Disque en bois:

Diamètre :	220 mm
Hauteur :	15 mm
Masse :	env. 425 g
Moment d'inertie :	0,51 kgm <sup>2</sup>

Sphère en bois :

Diamètre :	146 mm
Masse :	env. 1190 g
Moment d'inertie :	0,51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Principe

Pour déterminer les moments d'inertie de différents corps, ces derniers sont placés sur un axe monté sur roulement à billes, sur lequel un ressort spiral agit avec le moment de rappel  $D$ . Le moment  $J$  résulte de la durée de l'oscillation  $T$  du pendule à torsion.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Les valeurs déterminées par l'expérience confirment les résultats que fournit la théorie pour un corps de masse  $m$ , dont les éléments  $\Delta m$  tournent dans un écart  $r_z$  autour de l'axe fixe :

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Remarques sur la manipulation

- Insérer l'axe de torsion dans le socle pour statif et l'orienter horizontalement à l'aide de la nivelle.
- Ne pas actionner les vis des éléments de la masse qui pressent les crantages contre la barre. (Les vis sont ajustées de telle sorte que les éléments de la masse peuvent être déplacés et retenus contre la force centrifuge.)
- Ajuster la disposition de l'expérience de sorte que les ressorts sont comprimés, mais pas pliés.
- Au début de l'oscillation, une déviation de 180° (max. 360°) est recommandée.
- Déterminer la durée de l'oscillation en calculant la moyenne de plusieurs mesures par ex. pour 5 oscillations.
- Noter la valeur exacte du moment de rappel  $D$  requis pour déterminer le moment d'inertie  $J$  à partir de la durée d'oscillation  $T$  sur l'axe de torsion ou dans les instructions de service.

## 8. Expériences

Pour réaliser les expériences, on a besoin des dispositifs supplémentaires suivants :

1 Trépied, 185 mm	U13271
1 Chronomètre numérique	U11902
1 Dynamomètre de précision 1 N	U20032
1 Corps géométriques adaptés à l'axe de torsion	U20051

### 8.1 Détermination du moment de rappel $D$

- Enficher la barre sans les masses sur l'axe de torsion.
- Disposer un dynamomètre de 1 N sur la barre, de telle sorte qu'il l'attaque à la verticale.
- Dans des écarts  $r$  de 10 cm, 15 cm et 20 cm du centre de la barre, mesurer les forces  $F$  nécessaires pour déplacer la barre de sa position d'équilibre sur  $\alpha = 180^\circ$ .

Moment de torsion :  $M = F \cdot r$

Moment de rappel :  $D = \frac{M}{\alpha}$

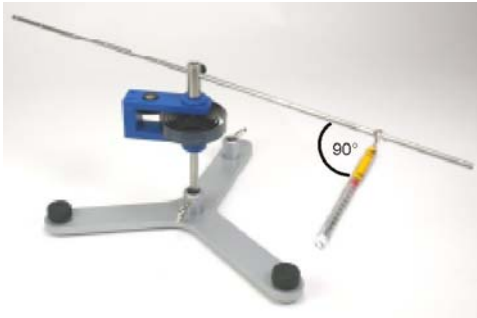


Fig. 2 Détermination du moment de rappel

### 8.2 Rapport entre le moment d'inertie $J$ et l'écart $r$ , une masse $m$ tournant autour d'un axe fixe

- Enficher la barre sans les masses sur l'axe de torsion.
- Déterminer le moment d'inertie  $J(\text{barre})$ .
- Disposer les masses symétriquement à 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm et 25 cm du centre de la barre.
- Déterminer le moment d'inertie  $J(\text{barre} + \text{masses})$ .
- Déterminer  $J(\text{masses}) = J(\text{barre} + \text{masses}) - J(\text{barre})$ .



Fig. 3 Rapport entre le moment d'inertie  $J$  et l'écart  $r$

### 8.3 Comparaison des moments d'inertie de cylindres de même masse, mais de différente répartition de la masse

#### 8.3.1 Disque en bois (DB)

- Enficher le disque en bois (DB) sur l'axe de torsion.
- Déterminer le moment d'inertie  $J(\text{DB})$ .



Fig. 4 Déterminer le moment d'inertie d'un disque en bois

#### 8.3.2 Cylindre massif (CM) et cylindre creux (CC)

- Enficher le plateau de logement (P) sur l'axe de torsion.
- Déterminer le moment d'inertie  $J(\text{P})$ .
- Placer les cylindres sur le plateau (P).
- Déterminer les moments d'inertie  $J(\text{CM} + \text{P})$  et  $J(\text{CC} + \text{P})$ .
- Déterminer les moments d'inertie avec la soustraction  
 $J(\text{CM}) = J(\text{CM} + \text{P}) - J(\text{P})$   
 $J(\text{CC}) = J(\text{CC} + \text{P}) - J(\text{P})$



Fig. 5 Comparaison des moments d'inertie de cylindres

#### 8.4 Moment d'inertie d'une sphère (S)

- Enficher la sphère (S) sur l'axe de torsion.
- Déterminer le moment d'inertie  $J(\text{S})$ .

Une comparaison de la sphère avec le disque en bois voir 8.3.1) montre qu'ils présentent tous deux le même moment d'inertie.

Les sphère (S) et les disques en bois (DB) ont le même moment d'inertie lorsque l'équation s'applique à leurs masses  $m$  et à leurs rayons  $R$  :

$$m(\text{DB}) \cdot R(\text{DB})^2 = \frac{4}{5} m(\text{S}) \cdot R(\text{S})^2$$



Fig. 6 Déterminer le moment d'inertie d'une sphère

#### 8.5 Rapport entre le moment d'inertie $J$ et l'écart $a$ entre les axes de rotation et du centre de gravité, confirmation du théorème de Steiner

- Enficher le disque sur l'axe de torsion et l'ajuster à l'axe horizontal.
- Faire tourner le disque autour de l'axe du centre de gravité ( $a = 0$ ).
- Déterminer le moment d'inertie  $J_o$ .
- Déterminer les moments d'inertie  $J_a$  pour les écarts  $a = 2$  cm, 4 cm, 6 cm...16 cm entre l'axe de rotation et l'axe du centre de gravité.

- Après chaque modification de  $a$ , ajuster le disque sur l'axe horizontal.
- Former les quotients  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{const.}$

Le théorème de Steiner est ainsi  $J_a = J_0 + ma^2$  confirmé.

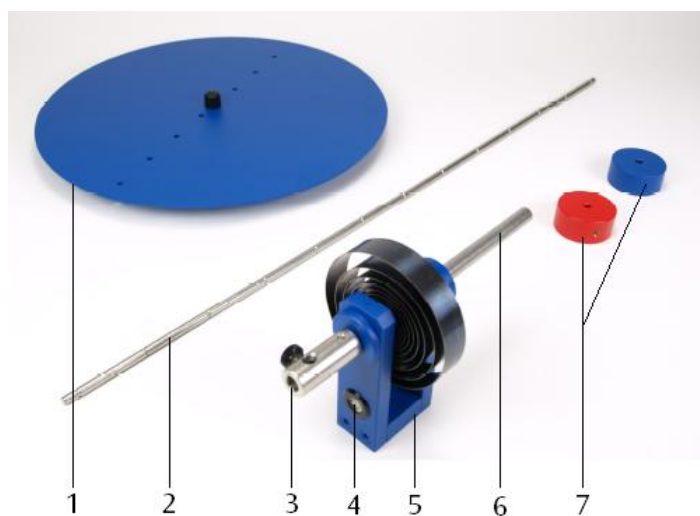


Fig. 7 Confirmation du théorème de Steiner

## Asse di torsione U20050

### Istruzioni per l'uso

03/11 Alf



- 1 Disco circolare
- 2 Asta trasversale
- 3 Supporto per provini
- 4 Livella
- 5 Forcella con molla a spirale
- 6 Asta di supporto
- 7 Pesi

#### 1. Norme di sicurezza

In caso di eccessivo serraggio della molla sussiste il pericolo che i provini, a causa dell'elevata forza centrifuga, vengano proiettati tutt'intorno.

- Non ruotare i provini più di 360° (si consiglia un spostamento di 180°).

#### 2. Descrizione

L'asse di torsione con i relativi accessori serve per esaminare oscillazioni torsionali e per determinare i momenti d'inerzia di provini diversi in base alla durata dell'oscillazione.

L'asse di torsione è costituito da un albero doppio dotato di cuscinetti a sfera accoppiato a una forcella mediante una molla a spirale. Un'asta di supporto permette il montaggio su una base di supporto o su un morsetto da tavolo. Una livella montata sulla forcella serve per l'allineamento orizzontale dell'asse di torsione. Come provini servono un'asta trasversale con pesi mobili e un disco circolare con un foro centrico e otto fori eccentrici per esperimenti per la determinazione dei momenti d'inerzia con assi di rotazione eccentrici e per confermare il teorema di Steiner.

#### 3. Fornitura

1 Albero con forcella, molla a spirale, asta di supporto e supporto per provini

1 Asta trasversale

2 Pesi

1 Disco circolare

#### 4. Dati tecnici

Momento raddrizzante della molla: 0,028 Nm/rad

Altezza dell'asse di torsione: ca. 200 mm

Asta trasversale:

Lunghezza asta: 620 mm

Massa: ca. 135 g

Pesi: 260 g ciascuno

Disco circolare:

Diametro: 320 mm

Massa: 495 g

Fori: 9

Distanza tra i fori: 20 mm

## 5. Accessori

Kit provini per asse di torsione U20051

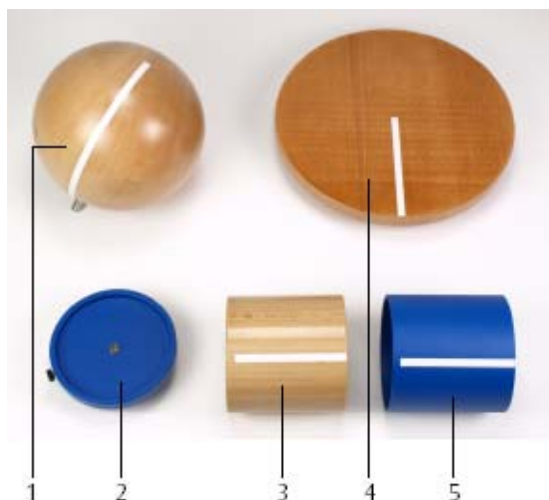


Fig. 1 Kit provini per asse di torsione  
1 sfera di legno, 2 piano di supporto, 3 Cilindro pieno, 4 disco di legno, 5 Cilindro cavo

Gli accessori per asse di torsione (U20050) consistono in due cilindri con massa quasi identica, tuttavia con distribuzione diversa della massa, un piano di supporto per i cilindri, un disco di legno e una sfera di legno.

Cilindro cavo (metallico):

Diametro esterno:	90 mm
Altezza:	90 mm
Massa:	ca. 425 g

Cilindro pieno (legno):

Diametro:	90 mm
Altezza:	90 mm
Massa:	ca. 425 g

Piano di supporto:

Diametro:	100 mm
Massa:	ca. 122 g

Disco di legno:

Diametro:	220 mm
Altezza:	15 mm
Massa:	ca. 425 g
Momento d'inerzia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

Sfera di legno:

Diametro:	146 mm
Massa:	ca. 1190 g
Momento d'inerzia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Principio

Per determinare i momenti d'inerzia di diversi provini, questi ultimi vengono collocati su un asse con cuscinetti a sfera al quale è applicata una molla a spirale con momento raddrizzante  $D$ ; dal periodo di oscillazione  $T$  del pendolo di torsione si ottiene il momento d'inerzia  $J$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2$$

I valori misurati sperimentalmente confermano quelli presentati dalla teoria su un corpo di massa  $m$  i cui elementi di massa  $\Delta m_z$  ruotano attorno ad un asse fisso a distanza  $r_z$ :

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Indicazioni per l'uso

- Montare l'asse di torsione sulla base di supporto e, con l'ausilio della livella, allinearla orizzontalmente.
- Non toccare le viti sulle masse che premono gli arresti a sfere contro l'asta. (Le viti sono regolate in modo tale che le masse possano essere spostate e che siano fissate per contrastare la forza centrifuga.)
- Approntare l'allestimento sperimentale sempre in modo tale che la molla sia compressa e non allargata.
- All'inizio della procedura di oscillazione è consigliabile uno spostamento di 180° (max. 360°).
- Determinare, calcolando il valore medio, la durata dell'oscillazione eseguendo ad esempio più misurazioni per 5 oscillazioni.
- Annotare sull'asse di torsione o sulle istruzioni per l'uso il valore preciso del momento raddrizzante  $D$  necessario per determinare il momento d'inerzia  $J$  in base alla durata dell'oscillazione  $T$ .

## 8. Esempi di esperimenti

Per l'esecuzione degli esperimenti sono inoltre necessari i seguenti apparecchi:

1 Kit provini per asse di torsione	U20051
1 Base di supporto, 3 gambe, 185 mm	U13271
1 Cronometro digitale	U11902
1 Dinamometro di precisione 1 N	U20032

### 8.1 Determinazione del momento raddrizzante $D$

- Inserire l'asta senza masse sull'asse di torsione.
- Applicare all'asta un dinamometro 1 N in modo tale che sia in posizione verticale.
- Misurare le forze  $F$  a distanze  $r$  di 10 cm, 15 cm e 20 cm dal centro dell'asta, necessarie per ruotare l'asta di  $\alpha = 180^\circ$  dalla posizione di equilibrio.

Momento torcente:  $M = F \cdot r$

Momento raddrizzante:  $D = \frac{M}{\alpha}$

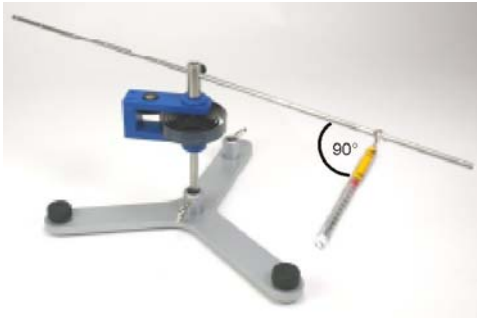


Fig. 2 Determinazione del momento raddrizzante

### 8.2 Dipendenza del momento d'inerzia $J$ dalla distanza $r$ , perché una massa ruoti attorno ad un asse fisso

- Inserire l'asta senza masse sull'asse di torsione.
- Rilevare il momento d'inerzia  $J(\text{asta})$ .
- Collocare le masse in modo simmetrico a distanze di  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$ ,  $15 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  e  $25 \text{ cm}$  dal centro dell'asta.
- Rilevare il momento d'inerzia  $J(\text{asta} + \text{masse})$ .
- Determinare  $J(\text{masse}) = J(\text{asta} + \text{masse}) - J(\text{asta})$ .



Fig. 3 Dipendenza del momento d'inerzia  $J$  dalla distanza  $r$

### 8.3 Confronto dei momenti d'inerzia di cilindri di uguale peso ma con diversa distribuzione del peso stesso

#### 8.3.1 Disco di legno (D)

- Inserire il disco di legno (D) sull'asse di torsione.
- Rilevare il momento d'inerzia  $J(D)$ .



Fig. 4 Determinazione del momento d'inerzia di un disco

#### 8.3.2 Cilindro pieno (CP) e cilindro cavo (CC)

- Inserire il piano di supporto (P) sull'asse di torsione.
- Determinare il momento d'inerzia  $J(P)$ .
- Collocare il cilindro sul piano di supporto (P).
- Rilevare i momenti d'inerzia  $J(\text{CP} + P)$  e  $J(\text{CC} + P)$ .
- Determinare i momenti d'inerzia per differenza  
 $J(\text{CP}) = J(\text{CP} + P) - J(P)$   
 $J(\text{CC}) = J(\text{CC} + P) - J(P)$



Fig. 5 Confronto dei momenti d'inerzia di cilindri

### 8.4 Momento d'inerzia di una sfera (S)

- Inserire la sfera (S) sull'asse di torsione.
- Rilevare il momento d'inerzia  $J(S)$ .

Confrontando i risultati ottenuti per la sfera e per il disco di legno (vedi 8.3.1.) si riscontra che possiedono lo stesso momento d'inerzia.

Le sfere (S) e i dischi di legno (D) possiedono lo stesso momento d'inerzia se per le loro masse  $m$  e per i raggi  $R$  è valida l'equazione:

$$m(D) \cdot R(D)^2 = \frac{4}{5} m(S) \cdot R(S)^2$$



Fig. 6 Determinazione del momento d'inerzia di una sfera

### 8.5 Dipendenza del momento d'inerzia $J$ dalla distanza $a$ fra asse di rotazione e asse baricentrico, conferma del teorema di Steiner

- Inserire il disco circolare sull'asse di torsione e regolarlo orizzontalmente.
- Far ruotare il disco circolare attorno al suo asse baricentrico ( $a = 0$ ).
- Rilevare il momento d'inerzia  $J_0$ .
- Determinare il momento d'inerzia  $J_a$  per la distanza  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $4 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ... $16 \text{ cm}$  fra l'asse di rotazione e l'asse baricentrico.
- Dopo ogni modifica di  $a$  regolare orizzontalmente il disco circolare.

- Creare i quozienti  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{cost.}$

Il teorema di Steiner  $J_a = J_0 + ma^2$  è confermato.



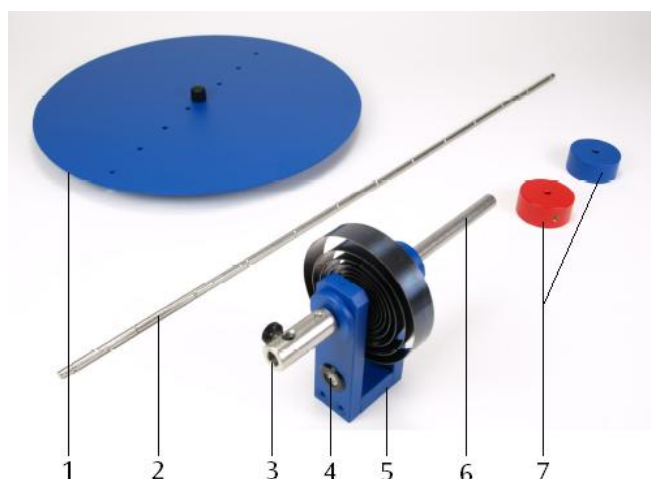
Fig. 7 Conferma del teorema di Steiner



## Eje de torsión U20050

### Instrucciones de uso

03/11 Alf



- 1 Disco
- 2 Varilla transversal
- 3 Alojamiento para los cuerpos de ensayo
- 4 Nivel
- 5 Horquilla con muelle de voluta
- 6 Varilla de apoyo
- 7 Pesas

#### 1. Aviso de seguridad

Al sobrepasar el límite de giro permitido del muelle, se corre el peligro de que las masas de ensayo complementarias salgan disparadas debido a la alta fuerza centrífuga.

- Los cuerpos de ensayo no se deben desviar más allá de 360° (se recomienda hasta 180°).

#### 2. Descripción

El eje de torsión y sus piezas complementarias se utilizan en el estudio de oscilaciones torsionales y para la determinación del momento de inercia de diferentes piezas de ensayo a partir de la duración de la oscilación.

El eje de torsión consta de un eje, sobre doble rodamiento de bolas, acoplado a una horquilla a través de un muelle de voluta. Una varilla de apoyo posibilita el montaje en un trípode o en una mesa de fijación. Un nivel colocada en la horquilla sirve para la orientación horizontal del eje de torsión. Como cuerpos de ensayo se tienen, una varilla transversal con pesas desplazables y un disco con una perforación central y ocho excéntricas para experimentos de determinación de momentos de inercia con ejes excéntricos y para comprobar el teorema de Steiner.

#### 3. Volumen de suministro

- 1 Eje con horquilla, muelle de voluta, varilla de apoyo y alojamiento para los cuerpos de ensayo
- 1 Varilla transversal
- 2 Pesas
- 1 Disco

#### 4. Datos técnicos

Momento antagonista del resorte:	0,028 Nm/rad
Altura del eje de torsión:	aprox. 200 mm
Varilla transversal:	
Largo de la varilla:	620 mm
Masa:	aprox. 135 g
Pesas:	c/u 260 g
Disco:	
Diámetro:	320 mm
Masa:	aprox 495 g
Perforaciones:	9
Distancia entre perforaciones:	20 mm

## 5. Accesorios

Juego de cuerpos de ensayo para eje de torsión U20051

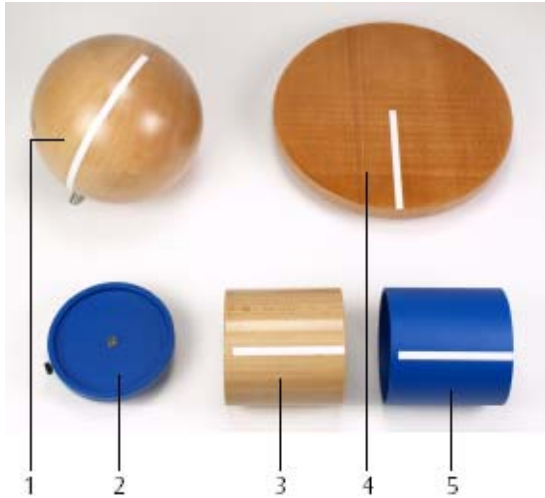


Fig. 1 Juego de cuerpos de ensayo para eje de torsión  
1 Esfera de madera, 2 Plato de asiento, 3 Cilindro compacto, 4 Disco de madera, 5 Cilindro hueco

Accesorios para el eje de torsión (U20050) compuesto de dos cilindros de masa casi idéntica, pero con diferentes distribuciones de masa, un plato de asiento para los cilindros, un disco de madera y una esfera de madera.

Cilindro hueco (metálico):

Diámetro externo:	90 mm
Altura:	90 mm
Masa:	aprox. 425 g

Cilindro compacto (de madera):

Diámetro:	90 mm
Altura:	90 mm
Masa:	aprox. 425 g

Plato de asiento:

Diámetro:	100 mm
Masa:	aprox. 122 g

Disco de madera:

Diámetro:	220 mm
Altura:	15 mm
Masa:	aprox. 425 g
Momento de inercia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

Esfera de madera:

Diámetro:	146 mm
Masa:	aprox. 1190 g
Momento de inercia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Principios

Para la determinación del momento de inercia se colocan diversas piezas de ensayo, sobre un eje apoyado sobre rodamiento de bolas, en el que actúa un muelle de voluta con un momento antagonista  $D$ . De la duración de la oscilación  $T$  del péndulo de torsión se obtiene el momento de torsión  $J$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{1}{4\pi^2} \cdot D \cdot T^2$$

Los valores del experimento confirman el resultado que nos da la teoría para un cuerpo de masa  $m$ , cuyos elementos de masa  $\Delta m$  rotan a una distancia  $r_z$ , en un eje fijo:

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Notas para su utilización

- Se monta el eje de torsión en el pie soporte y se orienta en la horizontal por medio de el nivel.
- No modifique el ajuste de los tornillos de las pesas que presionan los rodamientos de asiento contra la varilla. (Esos tornillos están ajustados de tal manera que las pesas puedan desplazarse y resistir la fuerza centrífuga.)
- Gire siempre el arreglo experimental, de manera que el muelle permanezca presionado y no se expanda.
- Para comenzar el proceso de oscilación se recomienda un valor de giro de 180° (máx. 360°).
- Tomando el valor promedio, determine la duración de la oscilación con varios pesos, para, por ejemplo, 5 oscilaciones.
- Marque en el eje de torsión, o anote en el manual de instrucciones el valor exacto del momento antagonista  $D$  requerido para determinar el momento de inercia  $J$  a partir de la duración de la oscilación  $T$ .

## 8. Ejemplos de experimentos

Para la realización de los experimentos, se requiere adicionalmente el siguiente equipo:

1 Juego de cuerpos de ensayo para eje de torsión	U20051
1 Base soporte, 185 mm	U13271
1 Cronómetro digital	U11902
1 Dinamómetro de precisión 1 N	U20032

### 8.1 Determinación del momento antagonista $D$

- Coloque la varilla, sin pesas, sobre el eje de torsión.
- Instale el dinamómetro 1 N en la varilla, de manera que actúe verticalmente.

- Mida las fuerzas  $F$  que son necesarias para hacer girar la varilla en un ángulo  $\alpha = 180^\circ$ , a partir de la posición de equilibrio, a una distancia de 10 cm, 15 cm y 20 cm del punto medio de la varilla.

Momento de torsión:  $M = F \cdot r$

Momento antagonista:  $D = \frac{M}{\alpha}$

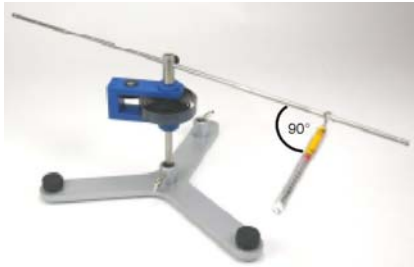


Fig. 2 Determinación del momento antagonista

### 8.2 Dependencia del momento de inercia $J$ de la distancia $r$ , en el que una masa $m$ rota en un eje fijo

- Coloque la varilla, sin pesas, en el eje de torsión.
- Calcule el momento de inercia  $J(\text{Varilla})$ .
- Ordene las pesas, simétricamente, a una distancia de  $r = 5$  cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm y 25 cm del punto medio de la varilla.
- Calcule el momento de inercia  $J(\text{Varilla} + \text{Pesas})$ .
- Confirme que  $J(\text{Pesas}) = J(\text{Varilla} + \text{Pesas}) - J(\text{Varilla})$ .



Fig. 3 Dependencia del momento de inercia  $J$  de la distancia  $r$

### 8.3 Comparación del momento de inercia de cilindros de peso similar pero con distinta distribución del mismo

#### 8.3.1 Disco de madera (DM)

- Coloque el disco de madera (DM) sobre el eje de torsión.
- Calcule el momento de inercia  $J(\text{DM})$ .



Fig. 4 Determinación del momento de inercia de un disco de madera

#### 8.3.2 Cilindro compacto (CC) y cilindro hueco (CH)

- Coloque el plato de asiento (P) sobre el eje de torsión.
- Determine el momento de inercia  $J(\text{P})$ .
- Coloque un cilindro sobre el plato de asiento (P).
- Coloque el momento de inercia  $J(\text{CC} + \text{P})$  y  $J(\text{CH} + \text{P})$ .
- Por medio de la diferencia:  
 $J(\text{CC}) = J(\text{CC} + \text{P}) - J(\text{P})$   
 $J(\text{CH}) = J(\text{CH} + \text{P}) - J(\text{P})$   
 determine el momento de inercia.



Fig. 5 Comparación del momentos de inercia de cilindros

### 8.4 Momento de inercia de una esfera (E)

- Coloque la esfera (E) sobre el eje de torsión.
- Calcule el momento de inercia  $J(\text{E})$ .

Si compara el momento de inercia de la esfera con el del disco de madera (ver 8.3.1.) comprobará que coinciden.

Las esferas (E) y los discos de madera (DM) tienen momentos de inercia iguales cuando para sus masas  $m$  y sus radios  $R$  se cumple la relación:

$$m(\text{DM}) \cdot R(\text{DM})^2 = \frac{4}{5} m(\text{E}) \cdot R(\text{E})^2$$



Fig. 6 Determinación del momento de inercia de una esfera

### 8.5 Dependencia del momento de inercia $J$ de la distancia $a$ entre los ejes de rotación y del centro de gravedad, confirmación del teorema de Steiner

- Coloque el disco en el eje de torsión y ajústelo horizontalmente.
- Deje girar el disco en su eje de centro de gravedad ( $a = 0$ ).
- Calcule el momento de inercia  $J_{\sigma}$ .

- Determine los momentos de inercia  $J_a$ , para una distancia de  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $4 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ..... $16 \text{ cm}$  entre los ejes de rotación y de centro de gravedad.
- Tras cada modificación de  $a$ , reajuste la posición horizontal del disco.
- Los cocientes  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{constantes}$

Así queda comprobada la ley de Steiner  
 $J_a = J_0 + ma^2$ .

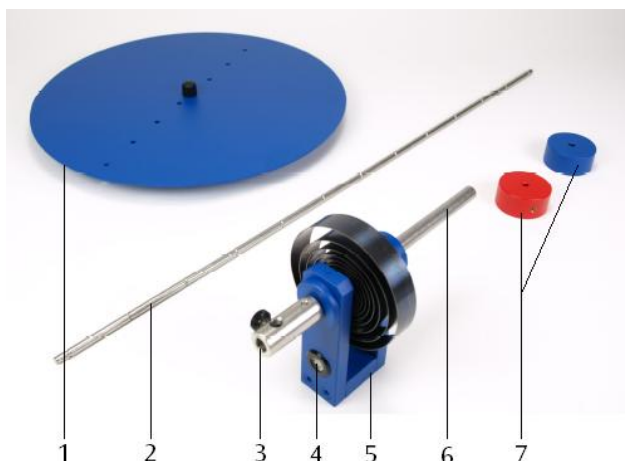


Fig. 7 Confirmación del teorema de Steiner

## Eixo de torção U20050

### Manual de instruções

03/11 Alf



- 1 Disco circular
- 2 Barra transversal
- 3 Receptor para corpo de amostra
- 4 Nível de bolha
- 5 Garfo com mola espiral
- 6 Barra de suporte
- 7 Peças de peso

#### 1. Indicações de segurança

Ao forçar a mola existe o perigo, que os corpos experimentais sejam lançados para longe, devido à alta força centrífuga.

- Não oscilar o corpo experimental mais do que máximo 360° (180° é recomendável).

#### 2. Descrição

O eixo de torção com os seus elementos acessórios correspondentes servem para pesquisar oscilações rotativas e para a determinação dos momentos de inércia em vários tipos de corpos experimentais a partir da duração da oscilação.

O eixo de torção consiste em num eixo com duplo rolamento, o qual está associado a um garfo por uma mola espiral. Uma barra de suporte permite a instalação sobre um tripé ou fixação através de uma prensa de mesa. Um nível de bolha de ar montada sobre o garfo serve para o alinhamento horizontal do eixo de torção. Como corpos de amostra servem uma barra transversal com peças de peso deslocáveis e um disco circular com uma perfuração central e oito perfurações excêntricas para experiências para a determinação dos momentos de inércia em eixos de rotação excêntrica para a comprovação do teorema de Steiner.

#### 3. Fornecimento

- 1 Eixo com garfo, mola espiral, barra de suporte e receptor para o corpo amostra
- 1 Barra transversal
- 2 Peças de peso
- 1 Disco circular

#### 4. Dados técnicos

Momento de referência da mola:	0,028 Nm/rad
Altura do eixo de torção:	aprox. 200 mm
Barra transversal:	
Comprimento:	620 mm
Massa:	aprox. 135 g
Peças de peso:	260 g cada
Disco circular:	
Diâmetro:	320 mm
Massa:	aprox. 495 g
Orifícios:	9
Distancia da perfuração:	20 mm

## 5. Acessório

Conjunto de corpos de amostra para o eixo de torção

U20051

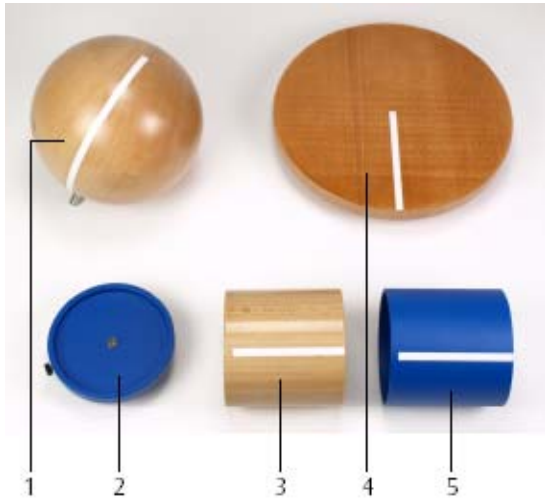


Fig. 1 Conjunto de corpos de amostra para o eixo de torção  
1 Esfera de madeira, 2 Prato de recepção, 3 Cilindro maciço, 4 Disco de madeira, 5 Cilindro oco

O acessório para eixo de torção (U20050) constando de dois cilindros com massa quase idêntica, porém com uma distribuição de massa diferente, um prato de recepção para os cilindros, um disco de madeira e uma esfera de madeira.

Cilindro oco (metal):

Diâmetro externo:	90 mm
Altura:	90 mm
Massa:	aprox. 425 g

Cilindro maciço (madeira):

Diâmetro:	90 mm
Altura:	90 mm
Massa:	aprox. 425 g

Prato de recepção:

Diâmetro:	100 mm
Massa:	aprox. 122 g

Disco de madeira:

Diâmetro:	220 mm
Altura:	15 mm
Massa:	aprox. 425 g
Momento de inércia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

Esfera de madeira:

Diâmetro:	146 mm
Massa:	aprox. 1190 g
Momento de inércia:	0,51 kgm <sup>2</sup>

## 6. Princípio

Para determinar o momento de inércia de diferentes corpos de amostra, estes são instalados sobre um eixo equipado de rolamento desde o qual age uma mola espiral com uma constante de torção  $D$ , do período de oscilação  $T$  resulta o momento de inércia  $J$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad J = \frac{D}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Os valores experimentais obtidos confirmam os resultados que a teoria proporciona para um corpo de massa  $m$ , cujos elementos de massa  $\Delta m$  rotam a uma distância  $r$  num eixo fixo:

$$J = \sum_{z=1}^n \Delta m_z \cdot r_z^2 = \int r^2 dm$$

## 7. Indicações para o montagem

- Montar o eixo de torção no pé de apoio e alinhá-lo horizontalmente com ajuda do nível de bolha.
- Não mexer os parafusos que pressionam os descansos para as esferas contra a barra (os parafusos estão ajustados de modo que as massas possam ser deslocadas e de forma que possam resistir contra a força centrífuga).
- Sempre organizar a ordem de experiência de modo que a mola esteja comprimida e não seja torcida.
- No início do movimento oscilatório recomenda-se um deslocamento angular de no máximo 180° (máx. 360°).
- Determinar o período de oscilação resultado de várias medições, por exemplo, 5 oscilações, pelo cálculo do valor médio.
- Anotar o valor exato da constante de torção  $D$ , necessária para determinar o momento de inércia  $J$  a partir do período de oscilação  $T$ , no próprio eixo de torção ou no manual de instruções.

## 8. Exemplos de experiências

Para a execução das experiências são necessários os seguintes aparelhos adicionais

1 Conjunto de corpos de amostra para o eixo de torção	U20051
1 Pé de apoio, 3 pernas, 185 mm	U13271
1 Cronômetro digital	U11902
1 Dinamômetro de precisão 1 N	U20032

### 8.1 Determinação da constante de torção $D$

- Inserir a barra sem as massas no eixo de torção.
- Aplicar 1 N no dinamômetro à barra de forma que este aja verticalmente.
- Medir a força  $F$  a intervalos  $r$  de 10 cm, 15 cm e 20 cm a partir do meio da barra, os quais são necessários para rotar a barra a  $\alpha = 180^\circ$  e saia do seu estado de equilíbrio.

Momento de torção:  $M = F \cdot r$

Constante de torção:  $D = \frac{M}{\alpha}$

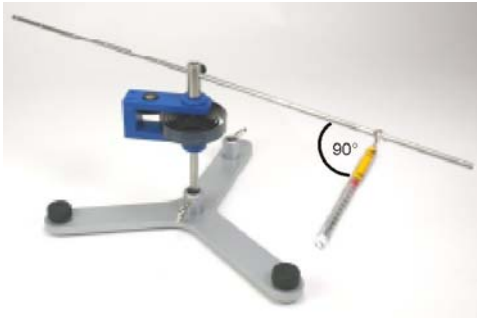


Fig. 2 Determinação da constante de torção

### 8.2 Dependência do momento $J$ do intervalo $r$ quando uma massa está em rotação num eixo fixo

- Inserir a barra sem as massas no eixo de rotação.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{barra})$ .
- Colocar as massas ordenadas simetricamente a intervalos de  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$ ,  $15 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  e  $25 \text{ cm}$  desde o meio da barra.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{barra} + \text{massas})$ .
- Determinar  $J(\text{massas}) = J(\text{barra} + \text{massas}) - J(\text{barra})$ .



Fig. 3 Dependência do momento  $J$  do intervalo  $r$

### 8.3 Comparação dos momentos de inércia de cilindros de massas idênticas mas com distribuição de massa diferente

#### 8.3.1 Disco de madeira (DM)

- Instalar o disco de Madeira (DM) no eixo de torção.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{DM})$ .



Fig. 4 Determinação do momento de inércia de um disco de madeira

#### 8.3.2 Cilindro maciço (CM) e cilindro oco (CO)

- Colocar o prato de recepção (P) no eixo de rotação.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{P})$ .
- Colocar o cilindro no prato de recepção.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{CM} + \text{P})$  e  $J(\text{CO} + \text{P})$ .
- Determinar os momentos de inércia  $J(\text{CM}) = J(\text{CM} + \text{P}) - J(\text{P})$   
 $J(\text{CO}) = J(\text{CO} + \text{P}) - J(\text{P})$   
por equação diferencial.



Fig. 5 Comparação dos momentos de inércia de cilindros

#### 8.4 Momento de inércia de uma esfera (E)

- Instalar a esfera (E) no eixo de torção.
- Determinar o momento de inércia  $J(\text{E})$ .

Da comparação da esfera com o disco de madeira (vide 8.3.1) resulta que ambos possuem o mesmo momento de inércia.

Esferas (E) e discos de madeira (DM) têm o mesmo momento de inércia quando o seguinte é válido para suas massas  $m$  e raios  $R$ :

$$m(\text{DM}) \cdot R(\text{DM})^2 = \frac{4}{5} m(\text{E}) \cdot R(\text{E})^2$$



Fig. 6 Determinação do momento de inércia de uma esfera

#### 8.5 Dependência do momento de inércia $J$ da distância $a$ entre o eixo de rotação e o eixo de gravidade, confirmação do teorema de Steiner

- Colocar o disco circular no eixo de torção e ajustá-lo horizontalmente.
- Deixar rotar o disco circular em torno ao seu eixo de gravidade ( $a = 0$ ).
- Determinar o momento de inércia  $J_0$ .

- Determinar o momento de inércia  $J_a$  para a distância  $a = 2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, 6 \text{ cm} \dots 16 \text{ cm}$  entre o eixo de rotação e o eixo de gravidade.
- Ajustar o disco circular na horizontal após cada mudança.
- Estabelecer os quocientes  $\frac{J_a - J_0}{a^2} = \text{const.}$

Com isto o teorema de Steiner  $J_a = J_0 + ma^2$  está comprovado.



Fig. 7 Confirmação do teorema de Steiner